Internetová matematická olympiáda
8. ročník, 24. 11. 2015

1. Baví se student Fakulty strojního inženýrství VUT v Brně (FSI) s kamarádem:

   Kamarád: „*Co jsi tak veselý? Něco slavíš?*“
   Student FSI: „*Já přímo ne, ale naše Fakulta strojního inženýrství slaví tento rok významné výročí svého založení.*“
   Kamarád: „*Nepovídej. A kolikáté už?*“

   Na to se student FSI jen usmál a prozradil dvě indicie, jak to zjistit:

   A) Součtem řady $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ získejte číslo s.

   B) Číslo s dosaďte do rovnice $s+\ln\dfrac{57}{29}=\ln(1-x)^2-\ln(x^2-1)$ a řešením x rovnice je hledané výročí Fakulty strojního inženýrství.

   Za pomoci indicií A) a B) vypočtěte, kolikáté výročí FSI v roce 2015 slaví.

   Řešení příkladu 1: Pro určení součtu s zadané nekonečné řady je nejdříve nutné spočítat s_n, což je n-tý částečný součet, pro jehož výpočet použijeme následující vzorce pro logaritmus součinu

$$\ln(ab)=\ln a+\ln b,$$

logaritmus podílu

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$$

a

$$\ln a^b=b\ln a.$$

Upravíme jednotlivé členy sumy a všimneme si, že se některé odečtou. Tedy

$$s_n=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)=\sum_{k=2}^{n}\Big(\ln(k-1)-2\ln k+\ln(k+1)\Big)=$$
$$=0-2\ln 2+\ln 3+\ln 2-2\ln 3+\ln 4+\ln 3-2\ln 4+\ln 5+\ln 4-2\ln 5+\ln 6+\ln 5-2\ln 6+\ln 7+\cdots$$
$$\cdots+\ln(n-5)-2\ln(n-4)+\ln(n-3)+\ln(n-4)-2\ln(n-3)+\ln(n-2)+$$
$$+\ln(n-3)-2\ln(n-2)+\ln(n-1)+\ln(n-2)-2\ln(n-1)+\ln n+\ln(n-1)-2\ln n+\ln(n+1)=$$
$$=-\ln 2+\ln n-2\ln n+\ln(n+1)=-\ln 2+\ln\frac{n+1}{n}.$$

Nyní, když již máme n-tý částečný součet s_n spočítaný, potřebujeme z něj udělat limitu, abychom dostali součet s nekonečné řady z indicie A).

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\ln 2+\ln\frac{n+1}{n}\right)=-\ln 2=\ln\frac{1}{2}.$$

Teď nám zbývá použít indicii B), tedy součet s řady dosadíme do zadané rovnice a rovnici vyřešíme.

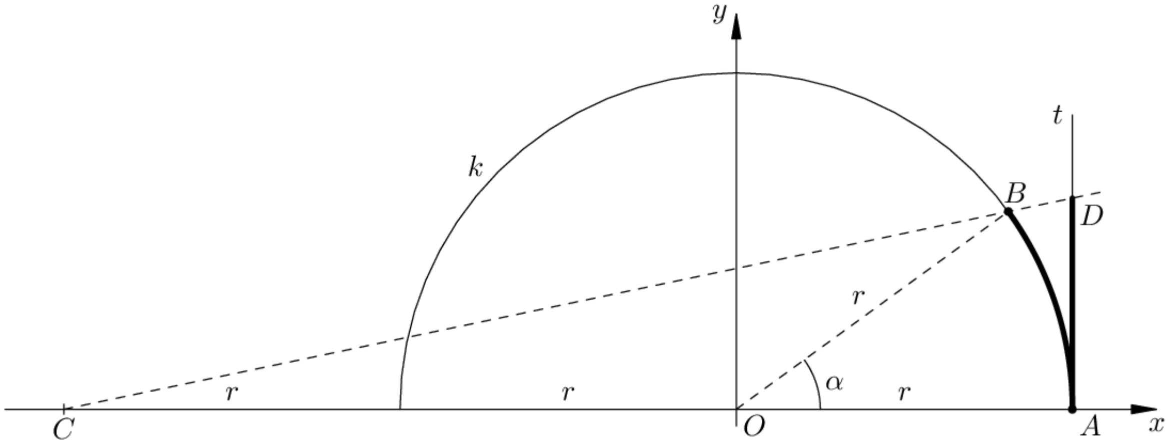
$$\begin{aligned}
\ln\tfrac{1}{2}+\ln\tfrac{57}{29} &= \ln(1-x)^2-\ln(x^2-1)\\
\ln\frac{57}{58} &= \ln\frac{(1-x)^2}{x^2-1}, \qquad \text{kde } x\neq\pm 1\\
\frac{57}{58} &= \frac{(1-x)^2}{x^2-1}\\
\frac{57}{58} &= \frac{x-1}{x+1}\\
x &= 115
\end{aligned}$$

Fakulta strojního inženýrství slaví tento rok 115. výročí od svého založení.

2. Je dána kružnice k se středem v bodě O a poloměrem r, kde $r > 0$. Na kružnici k jsou dány body A a B tak, že pro středový úhel $\alpha = \sphericalangle AOB$ platí $\alpha < 60^\circ$. Na polopřímce AO určeme bod C tak, že $|AC| = 3r$. V bodě A sestrojme tečnu t ke kružnici k. Průsečík tečny t a polopřímky CB označme D, viz Obrázek 1.

a) Určete obecně hodnotu rozdílu délky kruhového oblouku AB a úsečky AD v závislosti na poloměru r a úhlu α.

b) Sestavte tabulku, ve které tento rozdíl vyčíslete s přesností na 5 desetinných míst pro hodnotu poloměru $r = 10$ cm a úhel $\alpha = 30^\circ$. Tabulku pro názornost doplňte o výpočet rozdílu pro $r = 10$ cm a úhel $\alpha = 60^\circ$ s vědomím, že tento úhel není podle zadání přípustný.



Obrázek 1: K zadání příkladu 2

Řešení příkladu 2: Zaveďme pravoúhlou souřadnou soustavu tak, že počátek zvolíme v bodě O a přímku OA zvolíme jako osu x. Body B a C mají pak souřadnice $B = [r\cos\alpha, r\sin\alpha]$ a $C = [-2r, 0]$. Rovnici přímky CB určíme ve směrnicovém tvaru vyřešením soustavy dvou rovnic pro neznámé a a b, tedy

$$\begin{array}{rrl} CB: & y = & ax + b \\ C \in CB: & 0 = & a \cdot (-2r) + b \\ B \in CB: & r\sin\alpha = & a \cdot r\cos\alpha + b \\ \hline & r\sin\alpha = & a(r\cos\alpha + 2r) \\ & a = & \dfrac{r\sin\alpha}{r\cos\alpha + 2r} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha + 2}, \\ & b = & \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha + 2} \cdot 2r. \end{array}$$

Přímka CB má tedy rovnici

$$y = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + 2} \cdot x + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + 2} \cdot 2r. \tag{1}$$

Přímka AD má rovnici

$$x = r. \tag{2}$$

Hledáme souřadnice bodu D, který je průsečíkem přímky AD s přímkou CB. Řešením soustavy rovnic (1) a (2) dostáváme

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + 2} \cdot r + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + 2} \cdot 2r, \\ y &= 3r \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + 2} \end{aligned}$$

a bod D má tedy souřadnice $D = \left[r, 3r \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + 2}\right]$.

Délka úsečky AD je délka vektoru $\overrightarrow{AD} = \left(0, 3r \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + 2}\right)$, tedy

$$|AD| = \sqrt{0^2 + \left(3r \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + 2}\right)^2} = 3r \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + 2}.$$

Délka oblouku $\widehat{AB}$ je dána jako $\left|\widehat{AB}\right| = \alpha r$.

Pro vyřešení otázky a) nyní stačí určit rozdíl délky oblouku $\widehat{AB}$ a délky úsečky AD jako

$$\left|\widehat{AB}\right| - |AD| = \alpha r - 3r \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + 2}.$$

Mnohem názornější představu o významu provedené *Sobotkovy rektifikace*, která s dostatečnou přesností nahrazuje délku oblouku délkou úsečky, nám dá sestavení Tabulky 1 požadované v části b) pro konkrétní hodnotu poloměru $r = 10$, hodnotu úhlu $\alpha = 30°$ a úhlu $\alpha = 60°$, který ovšem formálně Sobotkova rektifikace již nepřipouští.

$r = 10$ cm	$\alpha = 30° = \frac{\pi}{6}$	$\alpha = 60° = \frac{\pi}{3}$
$\left\|\widehat{AB}\right\| - \|AD\|$	$\frac{\pi}{6} \cdot 10 - 3 \cdot 10 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + 2} = 0,00226$	$\frac{\pi}{3} \cdot 10 - 3 \cdot 10 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} + 2} = 0,07967$

Tabulka 1: Rozdíl délky oblouku $\widehat{AB}$ a úsečky AD získané Sobotkovou rektifikací

3. Řešte soustavu rovnic a řešení zdůvodněte

$$\alpha + \beta = 115^\circ, \tag{3}$$

$$\cos^2(\alpha-\beta) - \cos^2(\alpha-\beta)\cos^2\beta + 2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)\sin\beta\cos\beta + \\ + \sin^2(\alpha-\beta)\cos^2\beta + \left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Řešení příkladu 3: Uveďme přehled vzorců, které během řešení využijeme.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \tag{5}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \tag{6}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{7}$$

Na základě rovnosti (5) odvodíme

$$\sin\alpha = \sin(\alpha-\beta+\beta) = \sin(\alpha-\beta)\cos\beta + \cos(\alpha-\beta)\sin\beta$$

a odtud

$$\sin^2\alpha = \sin^2(\alpha-\beta+\beta) = \sin^2(\alpha-\beta)\cos^2\beta + 2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)\sin\beta\cos\beta + \cos^2(\alpha-\beta)\sin^2\beta. \tag{8}$$

Ze vztahu (6) odvodíme tvar

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}. \tag{9}$$

Z prvních dvou členů levé strany rovnice (4) vytkneme $\cos^2(\alpha-\beta)$ a poslední člen upravíme pomocí (9) následovně

$$\cos^2(\alpha-\beta)(1-\cos^2\beta) + 2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)\sin\beta\cos\beta + \sin^2(\alpha-\beta)\cos^2\beta + \sin^2(\alpha-\beta) + \cos^2\alpha = \frac{1}{2},$$

$$\cos^2(\alpha-\beta)\sin^2\beta + 2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)\sin\beta\cos\beta + \sin^2(\alpha-\beta)\cos^2\beta + \sin^2(\alpha-\beta) + \cos^2\alpha = \frac{1}{2}.$$

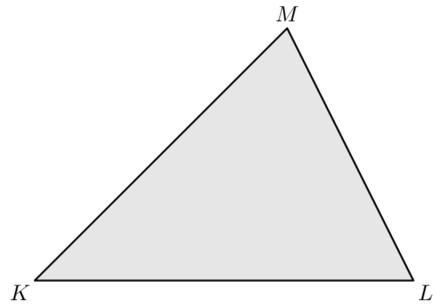
Využijeme-li vztahu (8), pak se levá strana rovnice (4) zjednoduší na rovnici

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{1}{2},$$

která není na základě vztahu (7) řešitelná.

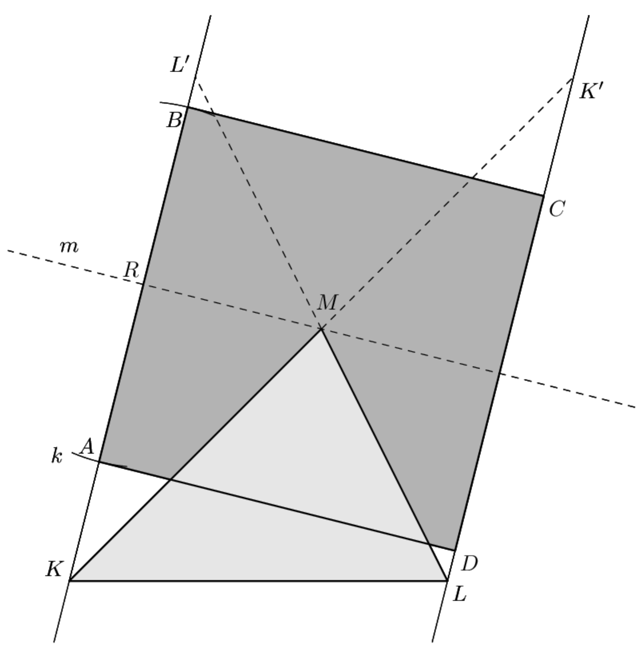
Informace obsažená v rovnici (3) nemá na neřešitelnost soustavy žádný vliv.

4. Je dán obecný trojúhelník KLM, viz například Obrázek 2. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby bod M byl středem čtverce $ABCD$, dále aby přímka AB procházela bodem K a přímka CD procházela bodem L. Zapište postup konstrukce.



Obrázek 2: K zadání příkladu 4

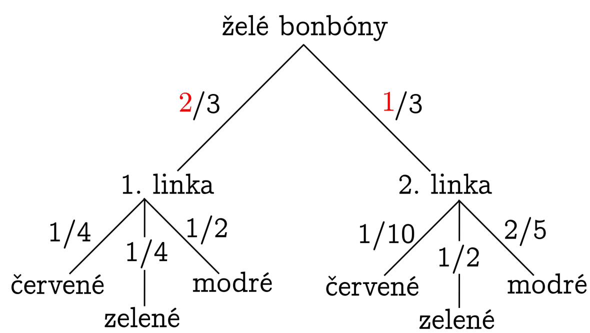
Řešení příkladu 4: Postup konstrukce:
1. $\triangle KLM$
2. K', L'; K', L' jsou středově souměrné s body K, L podle středu M
3. $\overleftrightarrow{KL'}$, $\overleftrightarrow{LK'}$
4. m; $m \perp \overleftrightarrow{KL'}$, $M \in m$
5. R; $R \in m \cap \overleftrightarrow{KL'}$
6. k; $k(R, r = |RM|)$
7. A, B; $A, B \in k \cap \overleftrightarrow{KL'}$
8. C, D; $C, D \in \overleftrightarrow{LK'}$, $|AB| = |BC| = |CD|$
9. čtverec $ABCD$



Obrázek 3: Řešení příkladu 4

5. V továrně se na dvou výrobních linkách vyrábí barevné želé bonbóny v barvě červené, zelené a modré. První linka vyrábí dvakrát více bonbónů než druhá. První linka vyrobí želé bonbóny v barvách v poměru $0,25 : 0,25 : 0,5$, druhá linka vyrobí želé bonbóny v barvách v poměru $0,1 : 0,5 : 0,4$. Bonbóny z obou linek se na konci továrny smíchají dohromady a balí se do balení po 10 kusech. Jeden takový balíček si koupím.
   a) Jaká je pravděpodobnost, že první bonbón vytažený z koupeného balíčku, bude červený?
   b) Jaká je pravděpodobnost, že tento červený bonbón byl vyroben na druhé lince?

Řešení příkladu 5: V řešení tohoto příkladu jsme se dopustili chyby, řešení jsme opravili. Červeně jsou uvedeny správné hodnoty. Omlouváme se. Situaci při výrobě si graficky znázorníme na Obrázku 4. V první úrovni rozdělíme želé bonbóny dle linek a jednotlivým větvím přiřadíme podíl výroby. Ve druhé úrovni rozdělíme dle poměru vyrobených bonbónů.



Obrázek 4: Opravené grafické znázornění výroby v příkladu 5

V dalším kroku spočítáme procentuální poměr $P()$ vyrobených bonbónů dle linky a barvy v celé směsi bonbónů na konci tovární výroby. Funkci $P()$ lze také chápat jako pravděpodobnost vyrobení daného kusu želé bonbónu. Protože jevy výroba na lince a barva bonbónu jsou nezávislé, pak pro jevy A a B platí $P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B)$ a můžeme jednotlivé údaje zapsat ve tvaru

$$P(1. \text{ linka} \wedge \text{červený z 1. linky}) = P(1. \text{ linka}) \cdot P(\text{červený z 1. linky}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6},$$

$$P(1. \text{ linka} \wedge \text{zelený z 1. linky}) = P(1. \text{ linka}) \cdot P(\text{zelený z 1. linky}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6},$$

$$P(1. \text{ linka} \wedge \text{modrý z 1. linky}) = P(1. \text{ linka}) \cdot P(\text{modrý z 1. linky}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3},$$

$$P(2. \text{ linka} \wedge \text{červený z 2. linky}) = P(2. \text{ linka}) \cdot P(\text{červený z 2. linky}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{30},$$

$$P(2. \text{ linka} \wedge \text{zelený z 2. linky}) = P(2. \text{ linka}) \cdot P(\text{zelený z 2. linky}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

$$P(2. \text{ linka} \wedge \text{modrý z 2. linky}) = P(2. \text{ linka}) \cdot P(\text{modrý z 2. linky}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}.$$

Při řešení části a) nemá velikost balení bonbónů žádný vliv na barevné složení směsi bonbónů. Pravděpodobnost, že první želé bonbón bude červený, je rovna

$$P(1. \text{ linka} \wedge \text{červený z 1. linky}) + P(2. \text{ linka} \wedge \text{červený z 2. linky}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{30} = \frac{6}{30} = 0,2.$$

Při řešení části b) víme, že vytažený bonbón červený je a ptáme se na pravděpodobnost výroby takového bonbónu na druhé lince továrny. Jedná se zde o tzv. podmíněnou pravděpodobnost a lze ji vypočítat poměrem pravděpodobností za pomoci klasické pravděpodobnosti jako $\frac{\text{podíl příznivých jevů}}{\text{celkový podíl jevů}}$, což v našem případě znamená

$$\frac{P(2. \text{ linka} \wedge \text{červený z 2. linky})}{P(1. \text{ linka} \wedge \text{červený z 1. linky}) + P(2. \text{ linka} \wedge \text{červený z 2. linky})} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{30}} = \frac{1}{6} = 0,1\overline{6}.$$

6. Je dána kružnice k se středem $K = [0, 0]$ a poloměrem jedna jednotka. Uvažujme bod A, který leží na této kružnici a může se po ní pohybovat. Dále uvažujme bod B, který se může pohybovat po úsečce KL, kde $L = [2, 0]$. Body A a B jsou spolu spojeny úsečkou délky jedna jednotka. Při pohybu bodu A po kružnici se tedy uvádí do pohybu i bod B. Odvoďte parametrické rovnice trajektorie středu S úsečky AB. Trajektorii také nakreslete.

Řešení příkladu 6: Bod A ležící na kružnici k má souřadnice $A = [\cos t, \sin t]$, kde parametr $t \in \mathbb{R}$ vyjadřuje úhel, který svírá spojnice středu kružnice a bodu A s kladným směrem osy x. Proto parametrické rovnice kružnice k vytvořené pohybem bodu A jsou

$$\begin{aligned} k: \quad & x = 1 \cdot \cos t \\ & y = 1 \cdot \sin t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Parametrické rovnice úsečky KL jsou

$$\begin{aligned} KL: \quad & x = 0 + 2u \\ & y = 0 + 0u, \quad u \in \langle 0, 1 \rangle. \end{aligned}$$

Parametr t kružnice a parametr u úsečky spolu souvisí, neboť jsou spolu svázány zadanou délkou úsečky AB. Sestrojme tedy kružnici a se středem v bodě A a poloměrem $|AB| = 1$. Parametrické rovnice kružnice a jsou

$$\begin{aligned} a: \quad & x = \cos t + 1 \cdot \cos v \\ & y = \sin t + 1 \cdot \sin v, \quad t \in \mathbb{R}, \quad v \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Bod B leží na průsečíku kružnice a s úsečkou KL. Řešíme tedy soustavu rovnic

$$\cos t + \cos v = 2u, \tag{10}$$

$$\sin t + \sin v = 0. \tag{11}$$

Z rovnice (11) vyplývá, že $\sin t = -\sin v$, tedy rovnice (11) má dvě řešení, která označíme v_1 a v_2 a platí

$$v_1 = -t + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{12}$$

$$v_2 = t + \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{13}$$

Dosazením prvního řešení (12) do levé strany rovnice (10) obdržíme vztah mezi parametrem t a první variantou řešení parametru u (označme u_1) ve tvaru

$$\cos t + \cos(-t + 2k\pi) = 2\cos t = 2u_1,$$

tedy

$$u_1 = \cos t. \tag{14}$$

Dosazením druhého řešení (13) do levé strany rovnice (10) obdržíme vztah mezi parametrem t a druhou variantou řešení parametru u (označme u_2) ve tvaru

$$\cos t + \cos(t + \pi + 2k\pi) = 0 = 2u_2,$$

tedy

$$u_2 = 0. \tag{15}$$

Začneme s analýzou jednoduššího případu (15), tedy položíme $u = 0$. Z parametrických rovnic úsečky KL, po které se pohybuje bod B, je jasné, že bod B bude mít vždy souřadnice $[0, 0]$. Střed S úsečky AB tedy bude mít souřadnice $S = \frac{1}{2}AB = \left[\frac{1}{2}(\cos t + 0),\ \frac{1}{2}(\sin t + 0)\right] =$

$\left[\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t\right]$, $t \in \mathbb{R}$. Tedy hledané parametrické rovnice trajektorie, po které se může pohybovat bod S, v tomto případě jsou

$$x = \frac{1}{2}\cos t,$$
$$y = \frac{1}{2}\sin t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

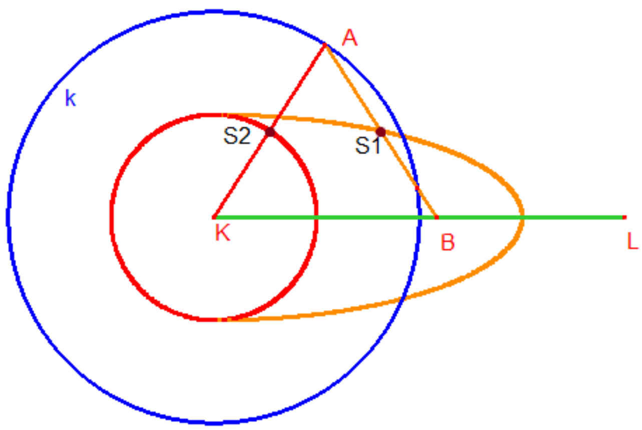
Jde o kružnici se středem v bodě $[0, 0]$ a poloměrem $\frac{1}{2}$.

Pro druhé řešení dané rovností (14) musíme vzít v potaz, že parametr $u \in \langle 0, 1\rangle$. Rovnice $u = \cos t$ platí tedy pouze pro úhly $t \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$. Druhou hledanou trajektorií je opět křivka, po které se pohybuje bod $S = \frac{1}{2}AB = \left[\frac{1}{2}(\cos t + 2\cos t), \frac{1}{2}(\sin t + 0)\right] = \left[\frac{3}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t\right]$, kde $t \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, tedy parametrické rovnice trajektorie bodu S jsou

$$x = \frac{3}{2}\cos t,$$
$$y = \frac{1}{2}\sin t, \quad t \in \left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle, k \in \mathbb{Z}$$

a jde o pravou polovinu elipsy se středem $[0, 0]$, délkou hlavní poloosy $\frac{3}{2}$ a vedlejší poloosy $\frac{1}{2}$.

Na Obrázku 5 je vyznačena trajektorie bodu S, který se může pohybovat po polovině elipsy a po kružnici.



Obrázek 5: Trajektorie středů S úseček AB z příkladu 6

7. Mějme 3^n na první pohled identických mincí, kde $n \in \mathbb{N}$, mezi kterými jsou 2 mince falešné. Falešné mince jsou lehčí než mince pravé. Jakým nejmenším počtem vážení jsme schopni pomocí dvouramenných vah schopni najít obě lehčí falešné mince?

Řešení příkladu 7: Uvažujme nejprve situaci, že by mezi 3^n mincemi byla pouze jedna falešná mince. Pak postupujeme následovně. Rozdělíme 3^n na tři stejně velké hromádky po 3^{n-1} mincích a porovnáme hmotnost hromádek pomocí vah. Najdeme tak tu nejlehčí hromádku, ve které je falešná mince. Tuto hromádku opět rozdělíme na tři stejně velké hromádky, hromádky převážíme a při rozhodování pokračujeme výše popsaným způsobem, až po n váženích najdeme falešnou minci.

Pokud budou mezi 3^n (pro $n \geq 2$) mincemi falešné mince dvě, bude postup složitější, protože po rozdělení na tři stejně velké hromádky může nastat situace, kdy:

a) obě falešné mince jsou v jedné hromádce,

b) falešné mince jsou ve dvou různých hromádkách.

Abychom rozhodli, jestli nastal případ a) nebo b) potřebujeme provést 2 vážení následovně. Prvním vážením zjistíme buď že

α) dvě hromádky váží stejně, a tedy může být v každé po jedné falešné minci, nebo v nich nebude ani jedna,

nebo

β) jedna hromádka je lehčí, a tedy v této hromádce musí být jedna nebo dvě falešné mince.

V případě α) provedeme druhé vážení, při kterém porovnáme hmotnost třetí hromádky vůči první hromádce. Je-li třetí hromádka lehčí, pak obsahuje dvě falešné mince, je-li třetí hromádka těžší, pak neobsahuje žádnou falešnou minci, a tedy první a druhá hromádka obsahuje po jedné falešné minci.

V případě β) provedeme druhé vážení, při kterém porovnáme hmotnost třetí hromádky vůči té lehčí již zvážené hromádce. Je-li třetí hromádka těžší, pak neobsahuje žádnou falešnou minci, je-li stejně těžká, tak obsahuje jednu falešnou minci.

Pomocí 2 vážení jsme tedy schopni rozhodnout, která ze tří stejně velkých hromádek obsahuje právě jednu, právě dvě nebo žádnou falešnou minci.

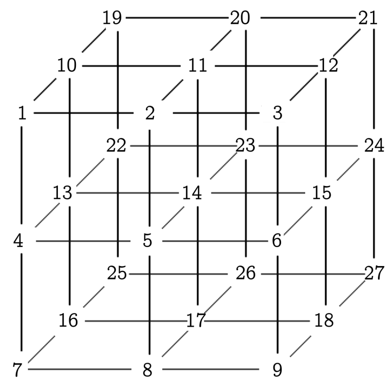
Pokud tedy držíme v rukou hromádku, o které víme, že obsahuje 2 falešné mince, pak musíme udělat po každém rozdělení na tři stejné hromádky (tuto operaci nazvěme „krok“) dvě vážení a po k ($k < n$) krocích nám zbude 3^{n-k} mincí, o kterých rozhodujeme.

Pokud v dílčím kroku k zjistíme, že máme dvě konkrétní hromádky, ve kterých je po jedné falešné minci, pak se úloha změní na 2 úlohy o hledání jedné falešné mince v hromádce, které zaberou $2(n-k)$ vážení. Celkem tedy potřebujeme nejméně $2k + 2(n-k) = 2n$ vážení.

Pokud provedeme $k = n-1$ kroků, což odpovídá $2(n-1)$ vážením a zbudou poslední 3 mince, mezi kterými jsou obě falešné, potom k finálnímu rozhodnutí stačí už jen jediné vážení. Tedy celkem potřebujeme nejméně $2(n-1) + 1 = 2n - 1$ vážení.

Abychom tedy měli absolutní jistotu, že jsme našli mezi 3^n mincemi dvě falešné mince, musíme provést nejméně $\max\{2n, 2n-1\} = 2n$ vážení.

8. Mějme 3D síť 3x3x3 složenou z 27 očíslovaných bodů dle Obrázku 6. Těmito body veďme cestu reprezentovanou vektorem čísel (pozic) tak, abychom navštívili každý bod právě jednou. Kolik takových cest dostaneme, pokud začneme ve středu sítě, tj. na pozici číslo 14? Dávejte pozor a nepočítejte rotačně symetrická řešení vícekrát.



Obrázek 6: 3D síť očíslovaných bodů k zadání příkladu 8

Řešení příkladu 8: Jak už bylo řečeno v zadání, budeme reprezentovat možná řešení vektorem čísel. Tento vektor bude mít na první pozici číslo 14. Musíme postupně projít celou 3D sítí tak, abychom navštívili všech 27 pozic. Každý vektor tedy bude mít 27 pozic.

Postupným procházením sítě si všimneme, že se sudými čísly ve vektoru sousedí výhradně lichá a naopak. Znamená to tedy, že ve vektoru se musí sudá a lichá čísla střídat. Vzhledem k tomu, že musíme projít 27 pozic s hodnotami 1, 2, . . . , 27, vychází 14 pozic s lichým číslem a 13 pozic se sudým číslem. Na to, aby mohlo dojít k pravidelnému střídání sudých a lichých čísel v hledaném vektoru, je nutné začínat lichým číslem. Protože číslo 14 není liché, neexistuje žádná možnost, jak danou síť předepsaným způsobem projít.

9. Jsou dána kladná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Dvojici indexů (k, m) nazveme „dobrou“ pro každé $j = 1, \ldots, n$, když

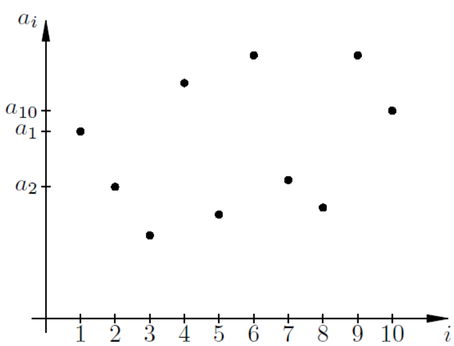
$$(a_k + a_j)(m - k) \geq (a_k + a_m)(j - k) \tag{16}$$

a nazveme „špatnou“, když

$$(a_k + a_j)(m - k) \geq (a_k + a_m)(m - j). \tag{17}$$

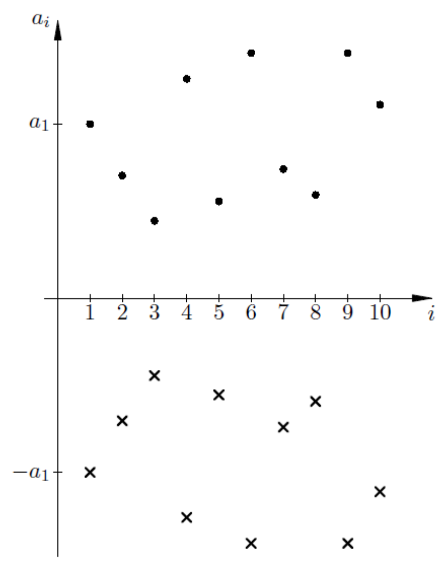
Dokažte, že existuje nejméně jedna dvojce indexů (k, m), kterou nazveme „dobrou“ a „špatnou“ současně.

Řešení příkladu 9: K řešení úlohy nám pomůže grafická představa o situaci. Zavedeme pravoúhlou souřadnou soustavu, kde na vodorovnou osu budeme nanášet hodnoty indexů $i = 1, \ldots, n$ a na svislou hodnoty $a_i,\ i = 1, \ldots, n$. Na příslušné pozici o souřadnicích $[i, a_i]$ vyznačíme body, viz Obrázek 7.



Obrázek 7: Grafická představa k příkladu 9

V nerovnicích (16) a (17) se vyskytují rozdíly $m - k$, $j - k$, $m - j$, což vyjadřuje rozdíl x-ových souřadnic příslušných bodů. Součty $a_k + a_m$, $a_k + a_j$, $a_m + a_j$ si zapíšeme jako rozdíly $a_m - (-a_k)$, $a_j - (-a_k)$, $a_m - (-a_j)$ a můžeme je považovat za rozdíly y-ových souřadnic bodů z Obrázku 7, které ovšem doplníme o body se souřadnicemi $[i, -a_i], i \in 1, \ldots, n$ znázorněné křížkem, viz Obrázek 8.

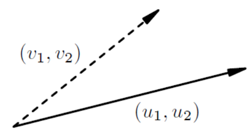


Obrázek 8: Doplnění bodů se souřadnicemi $[i, -a_i]$, $i = 1, \ldots, n$

Nerovnosti (16) a (17) vyjadřují vztah mezi směrnicemi přímek. Nerovnost (16) porovnává směrnice přímek daných body $[k, -a_k], [m, a_m]$ a body $[k, -a_k], [j, a_j]$, $j = 1, \dots, n$. Nerovnost (17) porovnává směrnice přímek daných body $[k, -a_k]$, $[m, a_m]$ a body $[j, -a_j], [m, a_m]$, $j = 1, \dots, n$. Uvedené dvojice bodů určují vektory.

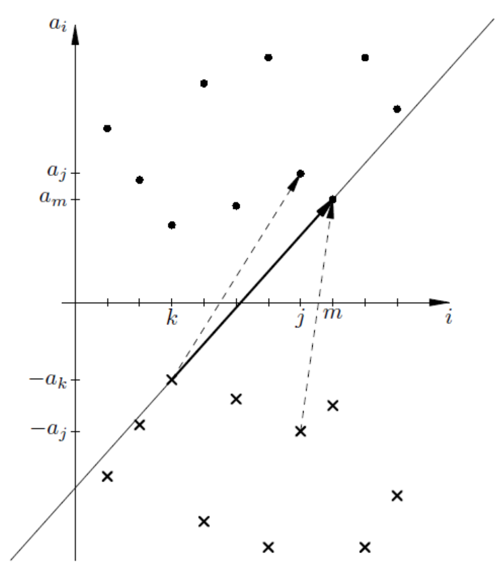
Pro další úvahy je dobré si uvědomit, že vztah mezi dvojicí vektorů se dá popsat například pomocí jejich vzájemné orientace. Pro vektor (u_1, u_2), který je oproti vektoru (v_1, v_2) otočený po směru oběhu hodinových ručiček, tj. záporně, viz Obrázek 9, platí

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 > 0. \tag{18}$$



Obrázek 9: Záporná orientace vektoru (u_1, u_2) vzhledem k vektoru (v_1, v_2)

Nerovnosti (16) a (17) interpretujeme pomocí Obrázku 10 následovně. Najdeme přímku, která od sebe odděluje body $[i, -a_i]$, $i = 1, \dots n$ označené křížkem a body $[i, a_i]$, $i = 1, \dots n$ označené puntíkem tak, že puntíky budou všechny nad tou přímkou nebo na ní a křížky budou všechny pod touto přímkou nebo na ní, viz Obrázek 10.



Obrázek 10: Určení „dobré“ a „špatné“ dvojice (k, m)

Vektor určený body $[k, -a_k], [m, a_m]$ nalezenými výše uvedeným postupem je orientován záporně vůči libovolnému vektoru $[k, -a_k], [j, a_j]$, $j = 1, \dots, n$ nebo s ním splývá, tedy platí

$$(m - k)(a_j + a_k) - (a_m + a_k)(j - k) \geq 0,$$

což je ve skutečnosti nerovnost (16) a tedy (k, m) jsou „dobrá“ dvojice.

Tedy pro dobré „dvojice“ jistě platí pro $\forall j = 1, \dots, n$ podmínka

$$m > k. \tag{19}$$

Zde ukončíme naše geometrické představy a budeme se věnovat úpravě obou nerovností (16) a (17), jejichž levé strany jsou stejné. Po jejich sečtení dostáváme

$$2(a_k + a_j)(m - k) \geq (a_k + a_m)(j - k + m - j), \tag{20}$$

$$2(a_k + a_j)(m - k) \geq (a_k + a_m)(m - k). \tag{21}$$

Po vydělení číslem $m - k$ platí

$$2(a_k + a_j) \geq (a_k + a_m), \tag{22}$$

tedy

$$2a_j \geq a_m - a_k. \tag{23}$$

Podmínka (23) ovšem nemůže být splněna pro $\forall j = 1, \ldots, n$, tedy současně „dobrá“ a „špatná“ dvojice indexů (k, m) neexistuje.

10. Posloupnost je dána rekurentním vzorcem $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$, pro $n \geq 4$ a hodnotami prvních tří členů $a_1 = 30$, $a_2 = 60$ a $a_3 = 90$. Určete explicitní vzorec pro n-tý člen posloupnosti pro $n \geq 4$.

Řešení příkladu 10: Při řešení použijeme standardní postup pro převádění rekurentního zápisu na explicitní vzorec. K rovnici

$$a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3} \tag{24}$$

přiřadíme charakteristickou rovnici

$$t^3 = 2t^2 + 5t - 6$$

a určíme její řešení $t_1 = 1$, $t_2 = -2$ a $t_3 = 3$. Potom posloupnosti $\{1^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{(-2)^n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{3^n\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovují rovnici (24). Explicitní vzorec pro n-tý člen posloupnosti je potom

$$a_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot (-2)^n + c_3 \cdot 3^n, \qquad \text{kde } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}. \tag{25}$$

Jelikož máme zadány první tři členy posloupnosti $a_1 = 30$, $a_2 = 60$ a $a_3 = 90$, sestavíme soustavu tří rovnic o třech neznámých c_1, c_2 a c_3

$$\begin{aligned} 30 &= c_1 \cdot 1^1 + c_2 \cdot (-2)^1 + c_3 \cdot 3^1, \\ 60 &= c_1 \cdot 1^2 + c_2 \cdot (-2)^2 + c_3 \cdot 3^2, \\ 90 &= c_1 \cdot 1^3 + c_2 \cdot (-2)^3 + c_3 \cdot 3^3, \end{aligned} \tag{26}$$

jejímž řešením je $c_1 = 25$, $c_2 = 2$ a $c_3 = 3$. Dosazením těchto hodnot do vztahu (25) získáme hledaný explicitní vzorec

$$a_n = 25 + 2 \cdot (-2)^n + 3 \cdot 3^n.$$

Internetovou matematickou olympiádu pro Vás organizuje Ústav matematiky FSI VUT v Brně a letos se koná při příležitosti 115. výročí založení Fakulty strojního inženýrství VUT v Brně.

Na přípravě zadání a celé organizaci soutěže se podílejí studenti bakalářského a magisterského oboru Matematické inženýrství, doktorského oboru Aplikovaná matematika a oboru Inženýrská mechanika. Autorem grafického návrhu diplomu je student oboru Průmyslový design ve strojírenství.

`www.matholymp.fme.vutbr.cz`
`www.math.fme.vutbr.cz`
`www.fme.vutbr.cz`
`www.vutbr.cz`
Mgr. Jana Hoderová, Ph.D., hoderova@fme.vutbr.cz