FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ústav matematiky

Internetová matematická olympiáda, 9. ročník, 29. 11. 2016

`http://matholymp.fme.vutbr.cz/`

1. Dokažte, že pro trojúhelník ABC a poloměr R kružnice jemu opsané, platí vztah

$$R = \frac{abc}{4P_{\triangle ABC}},$$

kde $P_{\triangle ABC}$ je obsah trojúhelníku ABC.

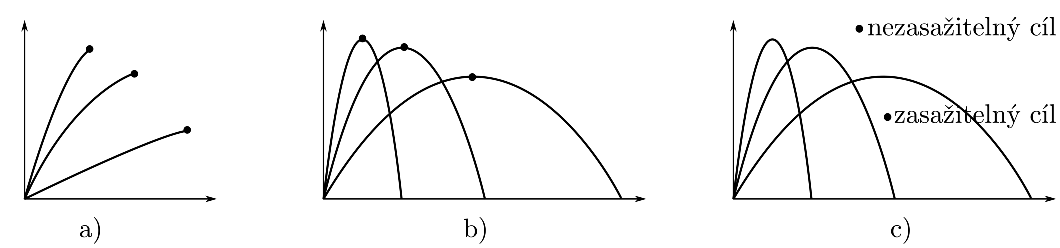
2. Máme kozu a travnatou obdélníkovou zahradu lemovanou ze všech stran květinovým záhonem. Dále máme k dispozici kladivo, dva kolíky, dostatečně dlouhý provaz a pro kozu máme obojek s očkem, kterým lze volně protáhnout provaz. Vyhovuje nám, že koza spásá trávu, ale rozhodně nesmí okusovat květiny. Rozhodněte, jaký tvar bude mít vypasená plocha. Dále určete souřadnice bodů, kam na zahradě umístíme kolíky a délku provazu, který ke kolíkům přivážeme, aby měla koza možnost spást co největší travnatou plochu a přitom neohrozila květiny. Vzdálenost od očka na obojku k tlamě kozy zanedbáváme.

3. U domovních dveří je n zvonkových tlačítek se jmény jednotlivých nájemníků bytů. K nim je třeba připojit n linek vedoucích do jednotlivých bytů. Montér zapojil linky náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jedna linka je zapojena správně? Výslednou pravděpodobnost (pro obecné n) zapište co nejjednodušším výrazem a poté ji vyčíslete pro $n = 5$. Dále vypočtěte limitu této pravděpodobnosti s přesností na 4 desetinná místa pro $n \to \infty$ (opravdu pro $n \to \infty$, tedy nikoliv jen vyčíslením předchozího výsledku pro větší hodnotu n).

4. Z děla $D[0; 0]$ střílíme šikmo vzhůru pod úhlem φ počáteční rychlostí o velikosti v_0. V čase t dospěje střela do bodu $P[x; y]$, kde

$$x = v_0 t \cos\varphi, \quad y = v_0 t \sin\varphi - \frac{1}{2} g t^2.$$

Odpor prostředí zanedbáváme, trajektorií střely je tedy parabola. Předpokládejme nyní, že z děla D střílíme střelami se stejnou počáteční rychlostí v_0, ale pod různými úhly φ, kde $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.



Obrázek 1: K zadání příkladu 4 a), b), c)

a) Co je množinou bodů, k nimž střely doletí za stejný čas t?
b) Co je množinou vrcholů trajektorií všech těchto střel?
c) Co je množinou bodů, které tvoří rozmezí pro zasažitelné a nezasažitelné cíle?
Ve všech případech najděte rovnici hledané křivky a křivku pojmenujte.

5. Nalezněte všechna přirozená čísla x, y a z, kde z je největší společný dělitel x a y, která splňují rovnici
$$x + y^2 + z^3 = xyz.$$

6. Mějme obdélníkový stůl o rozměrech $a \times b$. Zaveďme souřadný systém tak, že počátek bude v levém dolním rohu stolu, kladný směr osy x půjde po delší hraně stolu a kladný směr osy y po kratší hraně stolu. Na stole máme položený obdélníkový obrázek o rozměrech $c \times d$, přičemž $0 < d < c < b < a$. Tento obrázek leží na stole tak, že jeho střed S je umístěný na středu stolu a delší strana obrázku je rovnoběžná s osou x. Obrázek nám ovšem překáží v práci, proto ho posuneme o $2c$ v záporném směru osy x a o $2d$ v kladném směru osy y. Aby se nám na něj lépe dívalo, tak si obrázek pootočíme kolem jeho středu S o úhel $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ v kladném směru, tj. proti směru oběhu hodinových ručiček.

   a) O jakou vzdálenost jsme posunuli střed S obrázku?
   b) Jaké jsou souřadnice levého horního rohu obrázku po posunutí a otočení (označme tento bod například L'_h)?
   c) Spočtěte souřadnice středu S, posunutého středu S', levého horního rohu L_h původního obrázku a levého horního rohu L'_h posunutého a otočeného obrázku pro hodnoty $a = 90$ cm, $b = 65$ cm, $c = 15$ cm, $d = 10$ cm, $\alpha = 30°$. Vypočtené souřadnice zaokrouhlete na jedno desetinné místo.

7. Najděte všechna přirozená čísla a, b taková, že $b > 2$ a výraz $2^a + 1$ je dělitelný výrazem $2^b - 1$.

8. Najděte nejméně dva funkční předpisy pro nenulovou spojitou funkci f, má-li platit
$$f^2(x + y) = f^2(y) + f^2(x) - 2f^2(x)f^2(y) + f(2x)f(y)\cos(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

9. Dva studenti si o přestávce krátí si čas hrou. Mají u sebe $n \in \mathbb{N}$ kuliček a domluví se na těchto pravidlech: Hráč, který je na tahu, může odebrat libovolný počet kuliček v rozmezí $1, \ldots, k$, kde $k \in \mathbb{N}$ a zároveň $1 < k < n$. Vítězem se stává hráč, který odebere poslední kuličku. Určete všechny kombinace čísel k, n, pro které existuje vítězná strategie pro začínajícího hráče, tedy strategie, se kterou nelze v žádném případě prohrát.

10. Je dán systém třech kongruencí a jedné rovnice
$$\begin{aligned} a^2 &\equiv 17 \pmod{43}, \\ c &\equiv 3 \pmod{7}, \\ c &\equiv d \pmod{13}, \\ c &= a + b, \end{aligned}$$
kde čísla a, b, c, d jsou přirozená čísla. Najděte řešení pro 3 nejmenší hodnoty a a k nim nejmenší přípustné hodnoty b a nejmenší přípustné hodnoty d.

Sponzorem 9. ročníku soutěže Internetová matematická olympiáda je firma Humusoft - dodavatel systému pro technické výpočty a simulace MATLAB a Simulink. Informace o využití tohoto systému na středních školách najdete na webové stránce `http://www.humusoft.cz/matlab/academia/pass/`
Máte možnost využít nabídku multilicence programu MATLAB pro střední školy za cenu 9.780 Kč/rok.

HUMUSOFT®